МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Обнинский институт атомной энергетики –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)

ИНСТИТУТ ОБЩЕЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ (О)
Кафедра Высшей математики

Одобрено на заседании
Ученого совета ИАТЭ НИЯУ МИФИ
Протокол от 25.08.2025 № 25.8

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для студентов по освоению дисциплины

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
название дисциплины

для студентов направления подготовки

38.03.05 Бизнес-информатика
код и название направления подготовки

образовательная программа

Цифровая трансформация компании

Форма обучения: очная

г. Обнинск 2025 г.

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины «Линейная алгебра» (рекомендуемый режим и характер учебной работы, в том числе в части выполнения самостоятельной работы) – комплекс рекомендаций и разъяснений, позволяющий обучающимся оптимальным образом организовать процесс изучения как теоретического учебного материала дисциплины, так и подготовки к практическим занятиям и/или лабораторным работам, в том числе проводимым с использованием активных и интерактивных технологий обучения.

Цель дисциплины
– теоретическая подготовка и получение практических навыков по линейной алгебре для успешного усвоения фундаментальных, общетехнических и специальных дисциплин учебного плана, а также для возможности изучения специальной литературы, в случае необходимости самостоятельного углубления математических знаний после окончания ВУЗа;
− развить логическое мышление студентов, привить потребность теоретического обоснования различных явлений.

Задачи дисциплины:
- создание у студентов достаточно широкой подготовки в области математики и воспитание достаточно высокой математической культуры;
- сформировать навыки использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности;
- привить навыки самостоятельной работы с литературой по математике и ее приложениям;

Дисциплина «Линейная алгебра» реализуется в рамках обязательной части и относится к естественно-научному модулю.

Дисциплина изучается на 1 курсе в 2 семестре.

Основными видами учебной работы по данной дисциплине являются лекции, практические занятия, самостоятельная работа обучающихся. Для успешного освоения дисциплины студенты необходимо изучить лекционный материал и рекомендуемую литературу, отработать изученный материал на практических занятиях, выполнить задания для самостоятельной работы.

1 Лекции

Лекция – это важный источник информации по каждой учебной дисциплине. Она ориентирует студента в основных проблемах изучаемого курса, направляет самостоятельную работу над ним.

Содержание лекционного курса по дисциплине «Линейная алгебра» представлено в таблице

Неделя	Наименование раздела /темы дисциплины	Содержание
1-4.	**Матрицы, определители и системы линейных уравнений**	
1-2	Матрицы и определители	Матрицы, действия над матрицами. Определитель квадратной матрицы n–го порядка. Свойства определителей. Минор. Алгебраическое дополнение. Разложения определителя по строке (столбцу). Методы вычисления определителей. Обратная матрица. Условия существования. Нахождение обратной матрицы.
3-4.	Системы линейных уравнений	Система из n линейных уравнений с *n* неизвестными. Матричная запись. Правило Крамера. Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о базисном миноре. Элементарные преобразования и ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера Капелли. Метод Гаусса. Однородная система, фундаментальная совокупность решений. Общее решение неоднородной системы.
5-9	**Линейные пространства и подпространства, базис, координаты, линейные операторы**	
5-6.	Линейные пространства, размерность	Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Базис. Координаты вектора в базисе. Размерность. Изоморфизм линейных пространств. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка векторов. Теорема о размерности линейной оболочки. Сумма и пересечение подпространств, теорема о связи их размерностей. Прямая сумма подпространств.
7-9.	Операторы	Линейный оператор. Матричная запись оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия над линейными операторами. Обратимость операторов. Матрица обратного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг и дефект. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен оператора. Условия существования базиса из собственных векторов.
10-13.	**Евклидовы пространства**	
10-12	Евклидовы пространства	Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Ортогональные элементы. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Определители Грама и их приложения. Многомерная евклидова геометрия. Ортогональное дополнение.

12-13	Операторы самосопряженный и ортогональный	Сопряженный, самосопряженный, унитарный и ортогональный операторы. Приведение самосопряженного оператора к диагональному виду в ортонормированном базисе.
14-16	**Квадратичные формы**	
14-16	Приведение формы к каноническому виду	Билинейные и квадратичные формы в вещественном линейном пространстве. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Метод Лагранжа. Закон инерции. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Неоднородный многочлен второй степени от *n* переменных. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническом виду.

Для лекций по каждому предмету должна быть отдельная тетрадь для лекций. Прежде всего, запишите имя, отчество и фамилию лектора, оставьте место для списка рекомендованной литературы, пособий, справочников.

Будьте внимательны, когда лектор объявляет тему лекции, объясняет Вам место, которое занимает новый предмет в Вашей подготовке и чему новому Вы сможете научиться. Опытный студент знает, что, как правило, на первой лекции преподаватель обосновывает свои требования, раскрывает особенности чтения курса и способы сдачи зачета или экзамена.

Отступите поля, которые понадобятся для различных пометок, замечаний и вопросов.

Запись содержания лекций очень индивидуальна, именно поэтому трудно пользоваться чужими конспектами.

Не стесняйтесь задавать вопросы преподавателю. Чем больше у Вас будет информации, тем свободнее и увереннее Вы будете себя чувствовать.

Базовые рекомендации:

- не старайтесь дословно конспектировать лекции, выделяйте основные положения, старайтесь понять логику лектора;
- точно записывайте определения, законы, понятия, формулы, теоремы и т.д.;
- передавайте излагаемый материал лектором своими словами;
- наиболее важные положения лекции выделяйте подчеркиванием;
- создайте свою систему сокращения слов;
- привыкайте просматривать, перечитывать перед новой лекцией предыдущую информацию;
- дополняйте материал лекции информацией;
- задавайте вопросы лектору;
- обязательно вовремя пополняйте возникшие пробелы.

Правила тактичного поведения и эффективного слушания на лекциях:

- слушать (и слышать) другого человека – это настоящее искусство, которое очень пригодится в будущей профессиональной деятельности;
- если преподаватель «скучный», но Вы чувствуете, что он действи-

тельно владеет материалом, то скука – это уже Ваша личная проблема (стоит вообще спросить себя, а настоящий ли Вы студент, если Вам не интересна лекция специалиста?).

Если Вы в чем-то не согласны (или не понимаете) с преподавателем, то совсем не обязательно тут же перебивать его и, тем более, высказывать свои представления, даже если они и кажутся Вам верными. Перебивание преподавателя на полуслове – это верный признак невоспитанности. А вопросы следует задавать либо после занятий (для этого их надо кратко записать, чтобы не забыть), либо выбрав момент, когда преподаватель сделал хотя бы небольшую паузу, и обязательно извинившись.

2 Практические занятия (семинары)

Практические занятия являются важной частью учебного процесса в вузе. Они проводятся с целью закрепления лекционного материала, овладения понятийным аппаратом предмета, методами и приёмами исследования, изучаемыми в рамках учебной дисциплины. Главной целью такого рода занятий является научиться применению теоретических знаний на практике.

Содержание практических занятий по дисциплине «Линейная алгебра» представлено в таблице:

Неделя	**Наименование раздела /темы дисциплины**	**Содержание**
1-4.	**Матрицы, определители и системы линейных уравнений**	
1-2.	Матрицы и определители	Действия с матрицами. Определитель матрицы. Обратная матрица, ранг матрицы. Матричные уравнения.
3-4	Системы линейных уравнений	Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Структура решений неоднородной системы
5-9.	**Линейные пространства и подпространства, базис, координаты, линейные операторы**	
5-7	Линейные пространства, размерность	Линейные пространства. Размерность. Базис. Координаты вектора в базисе. Изменение координат вектора при переходе к новому базису. Линейная оболочка векторов. Применение ранга матрицы к исследованию линейной зависимости векторов и нахождению размерности подпространства. Размерность и базис суммы и пересечения подпространств.
7-9	Операторы	Линейный оператор. Матричная запись и матрица оператора. Изменение матрицы оператора при переходе к новому базису. Действия над операторами. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду, базис из собственных векторов.

10-13.	**Евклидовы пространства**	
10-11	Евклидовы пространства	Пространства со скалярным произведением. Ортогонализация. Ортогональное дополнение, ортогональная составляющая. Измерение длин и углов. Матрица Грама.
12-13	Операторы самосопряженный и ортогональный	Сопряженный, самосопряженный и ортогональный операторы. Приведение самосопряженного оператора к диагональному виду в ортонормированном базисе.
4.	**Квадратичные формы**	
14-16	Приведение формы к каноническому виду	Квадратичные формы. Приведение к каноническому (нормальному виду). Исследование знакоопределенности. Приведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к каноническому виду.

На практическом занятии обсуждаются теоретические положения изучаемого материала, уточняются позиции авторов научных концепций, ведется работа по осознанию студентами категориального аппарата изучаемой дисциплины, определяется и формулируется отношение учащихся к теоретическим проблемам науки, оформляется собственная позиция будущего специалиста. Форма работы – диалог: и студенты, и преподаватель вправе: задавать друг другу вопросы, которые возникли и могут возникнуть у них в процессе изучения и обсуждения материала, делиться своими сомнениями, наблюдениями, приводить доводы «за» и «против» той или иной позиции, обосновывать возможность применения на практике тех или иных теоретических положений.

Для подготовки к практическому занятию студентам рекомендуется:

- изучить вопросы, которые будут обсуждаться на занятии;

- изучить список основной и дополнительной литературы, где студенты могут найти ответы на вопросы, обратить внимание на категории, которыми оперирует автор, выписать основные понятия и систематизировать их;

- разработать блок-схему, в которой найдут отражение все изучаемые вопросы темы;

- составить развернутый план изучаемого материала, который может быть использован для ответа на занятии.

В начале занятия студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия, раскрывают и объясняют основные положения публичного выступления. В процессе творческого обсуждения и дискуссии вырабатываются умения и навыки использовать приобретенные знания для различного рода ораторской деятельности.

Ввиду трудоемкости подготовки к практическому занятию преподаватель может предложить студентам алгоритм действий, рекомендовать еще раз внимательно прочитать записи лекций и уже готовый конспект по теме семинара, тщательно продумать свое устное выступление.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к

выступлению по всем поставленным в плане вопросам, проявлять максимальную активность при их рассмотрении. Выступление должно строиться свободно, убедительно и аргументировано. Преподаватель следит, чтобы выступление не сводилось к репродуктивному уровню (простому воспроизведению текста), не допускается и простое чтение конспекта. Необходимо, чтобы выступающий проявлял собственное отношение к тому, о чем он говорит, высказывал свое личное мнение, понимание, обосновывал его и мог сделать правильные выводы из сказанного. При этом студент может обращаться к записям конспекта и лекций, непосредственно к первоисточникам, использовать знание художественной литературы и искусства, факты и наблюдения современной жизни и т. д. Вокруг такого выступления могут разгореться споры, дискуссии, к участию в которых должен стремиться каждый.

В заключение преподаватель подводит итоги практического занятия. Он может (выборочно) проверить конспекты студентов и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения.

При изучении дисциплины используется значительное количество интерактивных методов обучения. Студенты привлекаются к активной сотворческой работе с преподавателем по поиску и подбору различных учебных материалов с использованием Интернет-ресурсов, а также формирования навыков организации профессионального взаимодействия с различными специалистами.

Перечень образовательных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, представлен в таблице.

№ пп	Наименование темы дисциплины	Вид занятий (лекция, практические занятия)	Количество ак. ч.	Наименование активных и интерактивных форм проведения занятий
1.	Тема 1. Матрицы и определители	лекция	2	Интерактивная лекция
		практические занятия	4	Устный опрос Решение заданий у доски и индивидуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа
2.	Тема 2. Системы линейных уравнений	лекция	2	Интерактивная лекция
		практические занятия	4	Устный опрос Решение заданий у доски и индивидуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа
3.	Тема 3. Линейные пространства	лекция	3	Интерактивная лекция
		практические занятия	6	Устный опрос Решение заданий у доски и индивидуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа
4.	Тема 4. Операторы	лекция	3	Интерактивная лекция
		практические занятия	6	Устный опрос Решение заданий у доски и индивидуально. Выполнение и защита

№ пп	Наименование темы дисциплины	Вид занятий (лекция, практические занятия)	Количество ак. ч.	Наименование активных и интерактивных форм проведения занятий
				ИДЗ. Контрольная работа
5.	Тема 5. Евклидовы пространства	лекция	2	Интерактивная лекция
		практические занятия	4	Устный опрос Решение заданий у доски и индивидуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа
6.	Тема 6. Операторы в евклидовых пространствах	лекция	2	Интерактивная лекция
		практические занятия	4	Устный опрос Решение заданий у доски и индивидуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа
7.	Тема 7. Квадратичные формы	лекция	2	Интерактивная лекция
		практические занятия	4	Устный опрос Решение заданий у доски и индивидуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа

3 Самостоятельная работа обучающихся

Подготовка современного специалиста предполагает, что в стенах института он овладеет методологией самообразования, самовоспитания, самосовершенствования. Это определяет важность активизации его самостоятельной работы. С целью организации данного вида учебных занятий необходимо в первую очередь использовать материал лекций и семинаров. Лекционный материал создает проблемный фон с обозначением ориентиров, наполнение которых содержанием производится студентами на семинарских занятиях после работы с учебными пособиями, монографиями и периодическими изданиями.

В ходе изучения дисциплины студентам рекомендуется вечером того дня, когда было проведено занятие, прочитать лекцию или просмотреть решение задач на семинаре. За десять минут до начала лекции или семинара также прочитать предыдущую лекцию и просмотреть материалы семинара. Данные рекомендации обусловлены исследованием Эббингауза.

В соответствии с кривой забывания Эббингауза разработаны следующие режимы повторения для наилучшего запоминания:

Если есть два дня:

- первое повторение – сразу по окончании чтения;
- второе повторение – через 20 минут после первого повторения;
- третье повторение – через 8 часов после второго;
- четвёртое повторение – через 24 часа после третьего.

Если нужно помнить очень долго:

- первое повторение – сразу по окончании чтения;
- второе повторение – через 20-30 минут после первого повторения;
- третье повторение – через 1 день после второго;
- четвёртое повторение – через 2-3 недели после третьего;
- пятое повторение – через 2-3 месяца после четвёртого повторения

Самостоятельно изучается рекомендуемая литература, проводится работа с библиотечными фондами и электронными источниками информации, специальной литературой, статьями из профильных журналов. Реферируя и конспектируя наиболее важные вопросы, имеющие научно-практическую значимость, новизну, актуальность, делая выводы, заключения, высказывая практические замечания, выдвигая различные положения, студенты глубже понимают вопросы курса.

Подготовка к практическим занятиям, а также выполнение заданий для самостоятельной работы требует от студента навыков работы с литературными источниками:

- умение выделять главное в тексте;
- умение составлять опорную схему изученного материала, тезисный и развернутый план-конспект;
- свободное владение проработанным материалом;
- способность рассказать своими словами суть проблемы;
- умение объяснить и дать определение встречающимся в тексте новым научным терминам;
- умение находить в жизни ситуации, которые могут служить иллюстрацией теоретического материала, обсуждаемого на занятиях.

Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых работ и выпускной квалификационной работы.

Важной является готовность студента к восприятию в курсе сочетания философского, теоретического материала с конкретным практическим, направленным на освоение умений и навыков практической организации профессиональной деятельности в образовательном учреждении.

Подготовка к практическому занятию включает 2 этапа:

I - организационный;

II - закрепление и углубление теоретических знаний.

На первом этапе студент планирует свою самостоятельную работу, которая включает:

- уяснение задания на самостоятельную работу;
- подбор рекомендованной литературы;
- составление плана работы, в котором определяются основные пункты предстоящей подготовки. Составление плана дисциплинирует и повышает

организованность в работе.

Второй этап включает непосредственную подготовку студента к занятию. Начинать надо с изучения рекомендованной литературы. Необходимо помнить, что на лекции обычно рассматривается не весь материал, а только его часть. Остальная его часть восполняется в процессе самостоятельной работы. В связи с этим работа с рекомендованной литературой обязательна. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практического приложения рассматриваемых теоретических вопросов. В процессе этой работы студент должен стремиться понять и запомнить основные положения рассматриваемого материала, примеры, поясняющие его, а также разобраться в иллюстративном материале. Заканчивать подготовку следует составлением плана (конспекта) по изучаемому материалу (вопросу). Это позволяет составить концентрированное, сжатое представление по изучаемым вопросам.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студентов. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения, проследить их логику и тем самым проникнуть в творческую лабораторию автора.

Ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Особенно важны и полезны записи тогда, когда в них находят отражение мысли, возникшие при самостоятельной работе.

Важно развивать умение сопоставлять источники, продумывать изучаемый материал. Большое значение имеет совершенствование навыков конспектирования. Преподаватель может рекомендовать студентам следующие основные формы записи: план (простой и развернутый), выписки, тезисы. Результаты конспектирования могут быть представлены в различных формах.

План – это схема прочитанного материала, краткий (или подробный) перечень вопросов, отражающих структуру и последовательность материала. Подробно составленный план вполне заменяет конспект.

Конспект – это систематизированное, логичное изложение материала источника. Различаются четыре типа конспектов:

- план-конспект – это развернутый детализированный план, в котором достаточно подробные записи приводятся по тем пунктам плана, которые нуждаются в пояснении;

- текстуальный конспект – это воспроизведение наиболее важных положений и фактов источника;

- свободный конспект – это четко и кратко сформулированные (изложенные) основные положения в результате глубокого осмысливания материала. В нем могут присутствовать выписки, цитаты, тезисы; часть материала может быть представлена планом;

- тематический конспект – составляется на основе изучения ряда ис-

точников и дает более или менее исчерпывающий ответ по какой-то схеме (вопросу).

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретается практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь.

При необходимости следует обращаться за консультацией к преподавателю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения.

Формы организации самостоятельной работы обучающихся (темы, выносимые для самостоятельного изучения; вопросы для самоконтроля; типовые задания для самопроверки) представлены в таблице.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Выполнить действие:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$$

2. Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Найти общее решение неоднородной системы, построить Ф.С.Р. однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

6. Решить систему по формулам Крамера и методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 25 \end{cases}$$

7. Найти координаты вектора $x = (7,-5)$ в базисе e_1', e_2', если он задан в базисе e_1, e_2:

$e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = \frac{4}{5}e_1 - e_2$.

8. Найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $y = 0$.

9. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Проверить, что векторы $f_1 = (1,-2,2,-3)$ и $f_2 = (2,-3,2,4)$ ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса.

11. Привести уравнение кривой к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и параллельного переноса $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0.$

12. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2.$

13. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием и записать соответствующее преобразование $2x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} + 2x_3^{\ 2} + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$;

14. Найти ортогональную проекцию $\vec{y}$ и ортогональную составляющую $\vec{z}$ вектора $\vec{x}$ относительно подпространства, порожденного векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, если $\vec{x} = (4,-1,-3,4)$, $\vec{a}_1 = (1,1,1,1), \vec{a}_2 = (1,2,2,-1); \vec{a}_3 = (1,0,0,3)$;

15. Основание параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, лежит в плоскости векторов $\vec{a}, \vec{b}$. Найти высоту параллелепипеда, проведенную к основанию, если в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ справедливо разложение $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3 - \vec{e}_4$, $\vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$.

16. Найти расстояние от вектора $\vec{x} = (1,3,-1,3)$ до линейной оболочки L векторов $(1,-1,1,1)$, $(5,1,-3,3)$ и угол между $\vec{x}$ и L.

4 Оценочные средства по дисциплине

Оценочные средства по дисциплине обеспечивают проверку освоения планируемых результатов обучения посредством мероприятий текущей и промежуточной аттестации.

4.1 Экзамен

а) типовые вопросы:

1. Матрицы, действия с матрицами (сложение матриц, умножение на число, умножение матриц, транспонирование).
2. Определители квадратных матриц порядка n. Определение по индукции через разложение по первой строке.
3. Минор, алгебраическое дополнение. Теорема о разложении определителя по элементам ряда (без доказательства).
4. Перестановки, инверсии, четность, нечетность перестановки. Определение определителя матрицы размера n через перестановки и инверсии.
5. Свойства определителей. Перестановка строк, транспонирование, линейное свойство. Следствия из свойств. Определители треугольной матрицы, блочной матрицы.
6. Следствие из теоремы о разложении определителя (фальшивое разложение).
7. Обратная матрица. Теорема об обратной матрице.

8. Правило Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений (теорема).
9. Ранг матрицы. Базисный минор. Сохранение ранга при элементарных преобразованиях. Линейная зависимость и независимость строк матрицы. Теорема о базисном миноре (без доказательства). Второе определение ранга матрицы (ранг – максимальное количество линейно независимых строк (столбцов) в матрице).
10. Классификация систем линейных алгебраических уравнений – совместные, несовместные, определенные, неопределенные. Теорема Кронекера – Капелли. Исследование и решение неоднородных и однородных систем. Метод Гаусса.
11. Ф.С.Р. однородной системы. Структура общего решения неоднородных систем.
12. Линейные пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов линейного пространства.
13. Базис. Размерность. Изоморфизм пространств. Теорема об изоморфности пространств одинаковой размерности над одним числовым полем (без доказательства).
14. Координаты вектора в данном базисе. Действия с координатами. Преобразование координат при переходе к новому базису.
15. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка векторов. Размерность подпространства. Теорема о размерности линейной оболочки.
16. Пересечение и сумма подпространств. Теорема о размерности суммы и пересечения двух подпространств.
17. Линейные операторы в линейном пространстве. Матрица оператора. Примеры операторов и матриц. Теорема о матричной записи линейного оператора (без доказательства).
18. Действия с операторами (сумма, произведение на число, суперпозиция). Обратный оператор.
19. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерности ядра и образа линейного оператора.
20. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
21. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов, соответствующих разным собственным значениям. Характеристический многочлен, его инвариантность.
22. Достаточное условие приводимости матрицы оператора к диагональному виду (две теоремы, одна без доказательства).
23. Евклидовы пространства. Определение. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Норма элемента. Неравенство треугольника. Угол между элементами.
24. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис.
25. Матрица Грама и её применение к вычислению объема n-мерного параллелепипеда (без доказательства).

26. Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства L в прямую сумму любого его подпространства $L_1 \subset L$ и ортогонального дополнения к L_1 (без доказательства). Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства. Угол между вектором и подпространством.
27. Сопряженный оператор. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе (без доказательства).
28. Самосопряженный оператор. Основные свойства: вещественность собственных значений, ортогональность собственных векторов, соответствующих разным собственным значениям, существование ортонормированного базиса из собственных векторов (последнее без доказательства).
29. Ортогональный оператор. Сохранение длин и углов, геометрический смысл. Ортогональная матрица и её свойства. Ортогональный оператор в 2-мерном случае и теорема об общем виде ортогонального оператора (без доказательства).
30. Квадратичные формы. Изменение матрицы формы при замене базиса.
31. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
32. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм (без доказательства).
33. Теорема о приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.
34. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

б) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов):

Билет экзамена содержит один теоретический вопрос и три (две) задачи.

По результатам выполнения экзаменационной работы оценивается уровень освоения обучающимся материала, предусмотренного учебной программой, уровень владения профессиональными терминами, умение обучающегося использовать теоретические знания при решении практических задач.

Экзамен считается сданным, если итоговый результат за выполненные задания составляет от 24 до 40 баллов. По каждому из 4-х заданий выставляется от 0 до 10 баллов.

Оценка	**Критерии оценки**
Отлично 36-40	Студент должен: - продемонстрировать глубокое и прочное усвоение знаний программного материала; - исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно

	изложить теоретический материал; - правильно формулировать определения; - продемонстрировать умения самостоятельной работы с литературой; - уметь сделать выводы по излагаемому материалу.
Хорошо 30-35	Студент должен: - продемонстрировать достаточно полное знание программного материала; - продемонстрировать знание основных теоретических понятий; достаточно последовательно, грамотно и логически стройно излагать материал; - продемонстрировать умение ориентироваться в литературе; - уметь сделать достаточно обоснованные выводы по излагаемому материалу.
Удовлетворительно 24-29	Студент должен: - продемонстрировать общее знание изучаемого материала; - показать общее владение понятийным аппаратом дисциплины; - уметь строить ответ в соответствии со структурой излагаемого вопроса; - знать основную рекомендуемую программой учебную литературу.
Неудовлетворительно 23 и меньше	Студент демонстрирует: - незнание значительной части программного материала; - не владение понятийным аппаратом дисциплины; - существенные ошибки при изложении учебного материала; - неумение строить ответ в соответствии со структурой излагаемого вопроса; - неумение делать выводы по излагаемому материалу.

4.2 Контрольные работы

а) примеры тестовых заданий:

Задание для контрольной работы 1

1. Образует ли линейное пространство всех положительных чисел, в котором сумма любых двух элементов a и b задается как $a \cdot b$; а произведение любого элемента a на любое число γ есть a^{γ}?

2. Найти координаты вектора $x = (7,-5,2)$ в базисе e_1', e_2', e_3', если он задан в базисе e_1, e_2, e_3 и $e_1' = e_1 + e_3,\ e_2' = e_1 + e_2,\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3.$

3. Решить матричное уравнение $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

4. Найти общее решение неоднородной системы, построить Ф.С.Р. однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Исследовать на линейную зависимость систему векторов e^x, e^{-x}, e^{2x} на $(-\infty,+\infty)$.

б) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов)

Контрольная работа считается выполненной, если правильно решены как минимум 3 задачи (получено 18 баллов и выше).

Все решенные задания в каждом варианте суммарно оцениваются 30 баллами: каждое из заданий оценивается в 6 баллов.

Оценка	**Критерии оценки**
Отлично с 27 до30 баллов	Сумма баллов решенных задач
Хорошо с 23 до 26 баллов	Сумма баллов решенных задач
Удовлетворительно с 18 до 22 баллов	Сумма баллов решенных задач
Неудовлетворительно с 0 до 17 баллов	Сумма баллов решенных задач

Задание для контрольной работы 2

1. Найти матрицу (в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$), образ и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $x - y - z = 0$.

2. Найти матрицу в базисе $(e_1', \quad e_2', \quad e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Найти собственные векторы и собственные значения $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Приводится ли матрица к диагональному виду? Если да, то найти диагональный вид и диагонализирующую матрицу.

4. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$.

5. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0.$

критерии и шкала оценивания компетенций (результатов)

Контрольная работа считается выполненной, если правильно решены как минимум 3 задачи (получено 18 баллов и выше).

Все решенные задания в каждом варианте суммарно оцениваются 30 баллами: каждое из заданий оценивается в 6 баллов.

Оценка	Критерии оценки
Отлично с 27 до30 баллов	Сумма баллов решенных задач
Хорошо с 23 до 26 баллов	Сумма баллов решенных задач
Удовлетворительно с 18 до 22 баллов	Сумма баллов решенных задач
Неудовлетворительно с 0 до 17 баллов	Сумма баллов решенных задач

5 Итоговая аттестация по дисциплине

Итоговая аттестация по дисциплине является интегральным показателем качества теоретических и практических знаний и навыков обучающихся по дисциплине и складывается из оценок, полученных в ходе текущей и промежуточной аттестации.

Текущая аттестация в семестре проводится с целью обеспечения своевременной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающихся.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины.

Текущая аттестация осуществляется два раза в семестр:

- контрольная точка № 1 (КТ № 1) – выставляется в электронную ведомость не позднее 8 недели учебного семестра. Включает в себя оценку мероприятий текущего контроля аудиторной и самостоятельной работы обучающегося по разделам/темам учебной дисциплины с 1 по 8 неделю учебного семестра.
- контрольная точка № 2 (КТ № 2) – выставляется в электронную ведомость не позднее 16 недели учебного семестра. Включает в себя оценку мероприятий текущего контроля аудиторной и самостоятельной работы обучающегося по разделам/темам учебной дисциплины с 9 по 16 неделю учебного семестра.

Результаты текущей и промежуточной аттестации подводятся по шкале балльно-рейтинговой системы.

Этап рейтинговой системы / Оценочное средство	**Неделя**	**Балл**	
		Минимум*	Максимум**
Текущая аттестация	**1-16**	**36 - 60% от максимума**	**60**
Контрольная точка № 1	**8**	**18 (60% от 30)**	**30**
Рейтинговая контрольная работа № 1	8	18	30
Контрольная точка № 2	**15-16**	**18 (60% от 30)**	**30**
Рейтинговая контрольная работа № 2	15	18	30
Промежуточная аттестация	**-**	**24 (60% от 40)**	**40**
Экзамен	-		
Билет экзаменационный	-	24	40
ИТОГО по дисциплине		**60**	**100**

* - Минимальное количество баллов за оценочное средство – это количество баллов, набранное обучающимся, при котором оценочное средство засчитывается, в противном случае обучающийся должен ликвидировать появившуюся академическую задолженность по текущей или промежуточной аттестации. Минимальное количество баллов за текущую аттестацию, в т.ч. отдельное оценочное средство в ее составе, и промежуточную аттестацию составляет 60% от соответствующих максимальных баллов.

Процедура оценивания знаний, умений, владений по дисциплине включает учет успешности по всем видам заявленных оценочных средств.

На каждом практическом занятии выполняются задания по пройденным темам согласно рабочему плану изучения дисциплины. Применяется групповое оценивание ответа или оценивание преподавателем.

По окончании освоения дисциплины проводится промежуточная аттестация в виде экзамена, что позволяет оценить совокупность приобретенных в процессе обучения компетенций. При выставлении итоговой оценки применяется балльно-рейтинговая система оценки результатов обучения.

Экзамен предназначен для оценки работы обучающегося в течение всего срока изучения дисциплины и призван выявить уровень, прочность и систематичность полученных обучающимся теоретических знаний и умений применять их в решении практических задач, приобретения навыков самостоятельной работы, развития творческого мышления.

Итоговая аттестация по дисциплине оценивается по 100-балльной шкале и представляет сумму баллов, заработанных обучающимся при выполнении заданий в рамках текущей и промежуточной аттестации

<table>
<tr><th>Сумма баллов</th><th>Оценка по 4-х балльной шкале</th><th>Оценка ECTS</th><th>Требования к уровню освоения учебной дисциплины</th></tr>
<tr><td>90-100</td><td>5- «отлично»/ «зачтено»</td><td>A</td><td>Оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, использует в ответе материал монографической литературы</td></tr>
<tr><td>85-89</td><td rowspan="3">4 - «хорошо»/ «зачтено»</td><td>B</td><td rowspan="3">Оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос</td></tr>
<tr><td>75-84</td><td>C</td></tr>
<tr><td>70--74</td><td rowspan="2">D</td></tr>
<tr><td>65-69</td><td rowspan="2">3 - «удовлетворительно» / «зачтено»</td><td rowspan="2">Оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала</td></tr>
<tr><td>60-64</td><td>E</td></tr>
<tr><td>0-59</td><td>2 - «неудовлетворительно»/ «не зачтено»</td><td>F</td><td>Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки. Как правило, оценка «неудовлетворительно» ставится обучающимся, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине</td></tr>
</table>